

[1]はじめに 線形系については、与えられた制御対象の特性が完全には記述できないような状況と前提としながらも、補償要素や制御装置を適切に接続した制御系を構成して、それらの調整可能なパラメータと定めて、制御系の特性が制御工学的要請条件と満すように設計を行うための理論が提案されている¹⁾。この理論は望ましい特性をもつ参照モデルに関するモデルマッチング法に基づいたものであり、制御対象の次元に依らず、減衰特性が乱れのない範囲で応答が最も速くなるような特性をもたらし得る設計を重視したものである。また、この方法は制御対象が微分方程式で表現された非線形系の場合についても拡張適用されており、その有効性が確認されている²⁾。

本論文では、制御対象の入出力関係がボルテラ級数で表現可能な場合に、制御対象の部分的知識を基にして、その逆システムを近似的に構成しなから、適当な方法を用いて、ある制限範囲内で制御系全体に望ましい参照モデルの特性を与えることが可能なことを示す。

2) 参照モデルと与えた非線形制御系の設計

2.1 参照モデルの記述

参照モデルとしては、通常の制御工学的要請に適合した望ましいステップ応答と示すような分母系表現の伝達関数表示モデルを用いる。これを(1)式に示した。

$$W(s) = \frac{1}{a_0 + a_1s + a_2s^2 + a_3s^3 + a_4s^4 + \dots} \quad (1)$$

ただし $\{a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots\} = \{1, 1, 0.5, 0.15, 0.03, 0.003, \dots\}$

制御系全体の入出力関係が(1)式の特性と一致するように補償器や制御器の設計を行う。具体的には、ボルテラ級数で表現された非線形

制御対象について、後述のような「縦続補償」および「フィードバック補償」と基にした制御系を構成し、制御性、安定性、速応性から見て十分に満足できるように補償器や制御器のパラメータと定めるものがある。

2.2 制御対象のボルテラ級数による記述

制御対象 H と 1 入力 1 出力非線形系とする。時刻 t における制御対象への入力と $x(t)$ 、出力と $z(t)$ としたときに、この系の入出力関係が一般に(2)式に示すようなボルテラ級数によって表現できるものとする。

$$z(t) = H[x(t), t] = \sum_{i=1}^{\infty} H_i[x(t), t] \quad (2)$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} h_i(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_i) x(t-\tau_1) x(t-\tau_2) \dots x(t-\tau_i) d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_i$$

ここに、制御対象 H を表し得る各非線形項 H_i については、線形項から γ 次までの有限項が既知であり、他の高次非線形項は出力に寄与分の小さい未知の項であるとする。

このことは、通常遭遇する物理系について一般に成り立つものと考えらる。

2.3 縦続補償による制御系の設計

Fig.1 に示すような、一般的な縦続補償による連続時間表現の制御系と考え、参照モデル W と与えた場合に、目標値 $r(t)$ と出力 $z(t)$ の関係が $z = W(r)$ と表わせるように制御器 C の設計を行う²⁾。

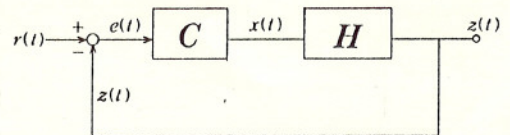


Fig.1 Control system with cascade compensation

このとき、制御入力 $x(t)$ は(3)式で与えらる。

$$x = C(e) = H^{-1}(W^{-1} - E)^{-1}(e) \quad (3)$$

すなわち、制御器 C は参照モデル W より得られるシステム $(W^{-1}-E)^{-1}$ と制御対象 H の逆システム H^{-1} の縦続接続により構成される。この場合に、もし与えられた制御対象が完全に既知であり、しかもその逆システムが完全な形で求められれば、構成されたこの制御系は目標値変化に対して、参照モデルの示す特性に一致する。しかるに、制御対象については実際には部分的な知識しか得られず、高次の非線形項が未知である。そしてまた、制御対象が低次の有限項で表現できる場合であっても、後述のように、その逆システムが無限級数になってしまうので、実用上はこれを有限項で近似する必要がある。したがって、上記のような完全なモデルマッチングは不可能である。しかしながら、このような非線形制御対象の場合にも、線形制御対象について行われるように、(1)式の自由パラメータを調節することによって、非線形成分の寄与分と等価的に線形成分に含められ、基本的な特性に関して部分的なモデルマッチングが可能である。

2.4 フィードバック補償による制御系の設計

縦続補償による制御系の設計と同様に、Fig.2 に示すような積分動作とフィードバック補償による連続時間表現の制御系と考へ、参照モデルと与えられた場合に、目標値 $r(t)$ と出力 $z(t)$ の関係が $z=W(r)$ で表わせるように制御器 C の設計を行う。²⁾

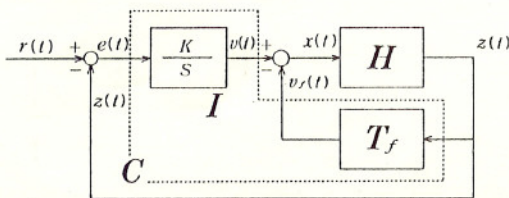


Fig.2 Control system with feedback compensation

D を微分演算子とすれば、Fig.2 中の各変数間

に成り立つ関係式から制御入力 $x(t)$ が算出できる。これを (4) 式に示した。

$$x = v - v_f \quad (4)$$

$$v = I(e) = KD^{-1}(e) \quad (4.a)$$

$$v_f = T_f(z) = (KD^{-1}(W^{-1}-E)-H^{-1})(z) \quad (4.b)$$

(4.a), (4.b) 式はそれぞれ、積分項 I とフィードバック補償項 T_f を表わしている。

この制御系では積分項は定常位置偏差と零にするためのものである。また、 v と x の入出力関係の伝達関数が (5) 式で表わせる。

$$Z(s)/V(s) = 1/Ks(\alpha_1 + \alpha_2 s + \alpha_3 s^2 + \alpha_4 s^3 + \dots) \quad (5)$$

したがって、フィードバック補償項はの値と適当に選ぶことによって制御対象の安定性と応答性の改善をはかるためのものである。この制御系について、参照モデルのパラメータと積分項の利得 K と適当に選ぶことによって、線形系における制御系の設計と同様に部分的モデルマッチングによる制御系の設計が可能である。利得 K の値は見掛上は任意に選択できる。しかしながら、 K が任意に選択できるのは完全なモデルマッチングが可能の場合についてだけである。実際には、2.3 節に述べたように制御対象が完全に記述できないことや、その逆システムが不完全であることからモデルマッチングが部分的にしか行い得ないので、 K の値を任意には選択できない。すなわち、利得 K の値は立ち上がり時間の指標となるのとの関連において、また制御対象の把握の程度とその逆システムの精緻さとの関連において定まることになる。

[3] 具体的な数式モデルと制御対象としての場合の制御系の設計と特性

2 節に述べた一般的な「縦続補償」と「フィードバック補償」による制御系の設計法と具体的な数式モデルを与えて非線形制御対象に応用し、各々の場合について得られる制御系の特性を検討することにする。

$$v = \frac{1}{a}((az) - (az)^2 + 2(az)^3 - 5(az)^4 + 14(az)^5 + \dots) \quad (9)$$

ところで、(9)式は無限級数であるからその収束性は「P次逆システム」 $K_{x(p)}$ の $P \rightarrow \infty$ としたときの「真の逆システム」 $K_x (= K_{x(\infty)})$ の存在に関わってくる。この場合に(9)式が収束し K_x が存在するための十分条件は $|az| < 1/2$ である。³⁾なお、この条件は(8)式がVについて解けるための十分条件でもある。与えられた制御対象の部分的知識を基として逆システムと構成する場合には、 $a = -0.3$ であるから $|z| < 1/0.6 = 1.67$ が収束するための十分条件になる。したがって「P次逆システム」の実際への応用時には、目標値 γ を適当な範囲内に限定して、逆システムへの入力の振幅の絶対値の大きさを制限しなから、(9)式を用い(10)式を十分にその機能と発揮し得る。後述の実際の制御系の設計では3次の非線形項まで用いて近似した「3次逆システム」 $K_{x(3)}$ を用いた。

3.3 外乱 $n(t) \equiv 0$ における制御対象 H のステップ応答

次に制御系設計の指針を得るために、制御対象の外乱に関する知識を除くすべての知識を基にした(10)式で表わせる非線形モデル $H_x = [H_{1,x}, H_{2,xx}, H_{3,xxx}]$ に対するステップ応答を求め、これをFig.6(a)に示した。これより、制御対象

$$z(t) = \int_0^t e^{-(t-\tau_1)} x(\tau) d\tau_1 + \int_0^t \int_0^{\tau_1} -0.3e^{-(t-\tau_1+\tau_2+\tau_3)} x(\tau_1)x(\tau_2)d\tau_1 d\tau_2 + \int_0^t \int_0^{\tau_1} \int_0^{\tau_2} -0.03e^{-(t-\tau_1+\tau_2+\tau_3+\tau_4)} x(\tau_1)x(\tau_2)x(\tau_3)d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \quad (10)$$

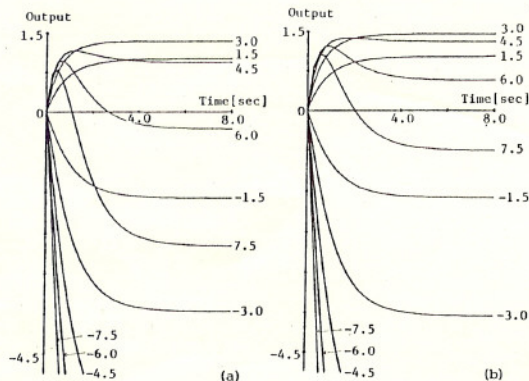


Fig.6 Responses for step inputs with different amplitudes
(a) Responses of a given controlled object with $n(t) \equiv 0$.
(b) Responses of a system consisting of $H_{1,x}$ and $H_{2,xx}$.

かかより複雑な非線形挙動を示すことがわかる。なお参考のために、制御対象の外乱の影響分を除く2次までの項が認識できたものとした場合に、同じステップ入力に対するその応答を求め、これを同(b)図に示した。

3.4 縦続補償による制御系の設計と特性

(10)式で表わす(9)に外乱の影響分を除いた制御対象と T とサンプル間隔、 $X_{p-2}(pT)$ 、 $Z_{p-2}(pT)$ として(11)式に示すように離散時間化した。

$$Z_p = \sum_{i=1}^p h_i^* X_{p-1, i} + \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p h_{ij}^{**} X_{p-1, i} X_{p-1, j} + \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^p h_{ijk}^{***} X_{p-1, i} X_{p-1, j} X_{p-1, k} \quad (11)$$

このうち、才2項までが既知であるとして、Fig.4に従って、離散時間表現の「3次逆システム」 $K_{x(3)}$ を構成した。また、参照モデル W としては α 以降の係数を零としたものを用いた。(1)式より得られる $(W^{-1}-E)^{-1}$ については、この値をパラメータとし、状態変数表示した後にサンプル間隔 T とした状態推移行列を求めることにより、これを差分方程式に変換した。このようにした系全体と離散時間表現した制御系について、目標値変化に対する出力を参照モデルの理論的な応答と比較してこの値を定めた。この値は応答が乱れのない範囲内で極小値と定められることが望ましい。したがって、この値を大きな値から順に減少させながら制御系の出力と参照モデルの応答の誤差率を算出して、これを一定の範囲内に抑えながら、しかもこの範囲内で最小値(極小値)をとるようなこの値を探索した。このアルゴリズムをもって縦続補償による非線形制御系の設計法とした。この場合に、この値を決定するための評価基準として(12)式を用いた。

$$E_z = \sum_{p=1}^m |Z_{c,p} - Z_{w,p}| / \sum_{p=1}^m |Z_{w,p}| \quad (12)$$

ただし $Z_{c,p}, Z_{w,p}$ はそれぞれ時刻 pT における入力 r に対する制御系の出力 (制御量) および参照モデル W の応答である。

Fig.7 に目標値変化に対して前記の設計を行った場合の制御系の特性を示した。(a) 図には制御偏差 e と、(b) 図には制御入力 x を示した。また、(c) 図には実線により制御入力 x に対する応答 Z_c と示し、

破線により目標値と $r=1.0$ とする参照モデルの応答 Z_w を示した。

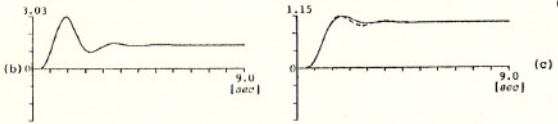


Fig.7 Step response of cascade compensating control system $\tau=0.15 \quad \sigma=0.817$
 (a) Controlled deviation e (b) Controlling input x
 (c) Controlled output z_c (solid line)
 Response of reference model z_w for $r=1.0$ (broken line)

次にステップ状外乱 $n(t)$ と制御対象に与えたとときに、目標値と $r=0$ とした場合の制御特性と検討した。外乱 n と入力 x の出力 z への寄与については、Fig.3 に示すように相互作用による影響分と有し、外乱 n 自身についても非線形特性と備えた影響分と有している。しかしながら、これらの関係は制御系の設計時には全く未知であるとしている。具体的に制御系の設計には、外乱とステップ状に与えたとときに(13)式に示す制御効率 μ と導入し、 μ の値が小さくなるだけ小さいことを望ましい条件として μ が最大値 (極大値) とするよう μ の値を定めた。このアルゴリズムをもって、外乱に対する縦続補償による制御系の設計法とした。

$$\mu = 1 - \frac{\sum_{p=1}^m |Z_{c,p} - r|}{\sum_{p=1}^m |Z_{w,p} - r|} \quad (13)$$

ただし、 r は目標値であり、 $Z_{w,p}$ は制御と行われない場合の制御対象の時刻 pT における応答である。

Fig.8 に外乱に対して設計した場合の制御系

の特性を示した。(a) 図は外乱 n と、(b) 図は制御偏差 e とを表わしている。また (c) 図には制御入力 x と示し、(d) 図にはこれに対する制御対象の応答 Z_c と実線と表示した。さらに比較のために、制御と行われない場合の応答 Z_n と破線と示した。

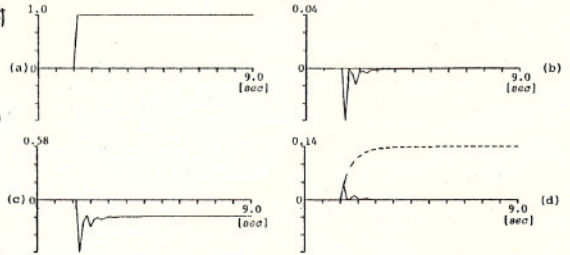


Fig.8 Response of cascade compensating control system for step disturbance $\tau=0.15 \quad \sigma=0.065$
 (a) Disturbance n (b) Controlled deviation e
 (c) Controlling input x (d) Controlled output z_c (solid line), Uncontrolled output z_n (broken line)

3.5 フィードバック補償による制御系の設計と特性

縦続補償による制御系の設計の場合と同様に、(6)式で示した制御対象について外乱に因する項を除いた2次までの非線形項が既知であるとしたときに、Fig.2 に従って制御系を離散時間系として構成した。参照モデルおよび逆システムについては、3.4節で用いたものと全く同一のものを用いた。制御器 C と構成するフィードバック補償器 T_f の第1項は $KD^{-1}(W^{-1}-E) = K(a_1\sigma + a_2\sigma^2 D + a_3\sigma^3 D^2 + a_4\sigma^4 D^3)$ となる。 D は連続時間系では微分操作に相当するので、離散時間系ではシフト演算子 z^{-1} と用いて $D = (1 - z^{-1})/T$ とするか、滑らかな演算を確保するために4点差アルゴリズムの $D = (1 + 3z^{-1} - 3z^{-2} - z^{-3})/6T$ を用いた。このようにして離散時間化した系全体について $K = K(\sigma)$; $dK/d\sigma < 0$ と適当に与えらるから、 μ の値とできるだけ小さいことを望ましい条件として、応答が乱れのない範囲で(12)式が最小値(極小値)になるよう μ と K の値と定める。この

数値計算アルゴリズムをもって、目標値変化に対するフィードバック補償による制御系の設計法とした。Fig.9に目標値変化に対してこの設計を行った場合の制御系の特性を示した。(a)図には制御偏差 e を示した。(b)図には制御入力 x と実線と、また「3次逆システム」 K_{x10} を用いて再現した入力と破線とを示した。これより K_{x10} が逆システムとしての機能を十分に果たしていることがわかる。(c)図には制御入力 x に対する制御対象の応答 z_c と実線と表示し、参考モデルの応答 z_w を破線と表示した。

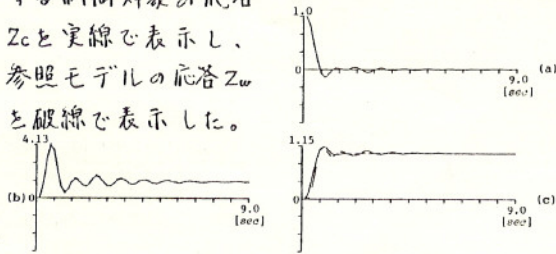


Fig.9 Step response of feedback compensating control system
 $\tau = 0.15 \quad \sigma = 0.347 \quad K = 8.864$
 (a) Controlled deviation e (b) Controlling input x
 (c) Controlled output z_c (solid line)
 Response of reference model z_w for $r=1.0$ (broken line)

次にステップ状外乱 $n(t)$ と制御対象に与え、目標値を $r=0$ としたときに、(13)式の制御効率 μ が最大値(極大値)をとるようにパラメータの σ と K の値と決定する。この方法をもって外乱に対するフィードバック補償による制御系の設計法とした。このとき得られた制御系の特性とFig.10に示した。(a),(b),(c)図にはそれぞれ外乱 n 、制御偏差 e 、および制御入力 x を示した。また、(d)図には実線により制御入力 x に対する

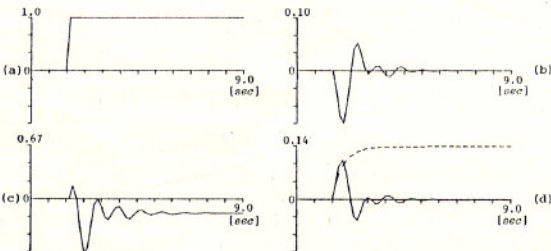


Fig.10 Response of feedback compensating control system for step disturbance
 $\tau = 0.15 \quad \sigma = 0.325 \quad K = 6.825$
 (a) Disturbance n (b) Controlled deviation e
 (c) Controlling input x (d) Controlled output z_c (solid line), Uncontrolled output z_n (broken line)

る制御対象の応答 z_c を示し、破線により制御を行わなかった場合の応答 z_w を示した。(4)おわりに 制御対象の構造およびパラメータの記述の不完全さ(不確かさ)はシステム制御に常につきまとう課題であり、このことは制御系の設計法に限定することなく、システム同定や実現の方法との関連で議論する必要がある。ところで、こうした不確かさがシステム制御を行う場合にどの程度許容できるのか、また正確に把握すべき次元やパラメータが何であるのかと明確にすべき立場をとつたのが線形系における「制御対象の部分的知識に基づく制御系の設計法」であった。そして、その一般化が縦横補償およびフィードバック補償による制御系の設計法であり、その方法は原則的に非線形制御対象についても適用し得るものであった。しかしながら、この方法には逆システムによる演算が不可欠であるし、一般の非線形系について逆システムと構成するのは、実際には必ずしも容易ではない。したがって、本論文では逆システムが一部理論化しておき、しかも非線形系の表現にかなり一般性をもつボルトラ級数で与えらるる非線形制御対象について議論を進めた。そして、線形制御系の設計における σ と K の値の決定法に替るパラメータ探索法を開発して非線形制御系の設計法とした。この方法は、複数解の存在と適当な解の選択法に若干検討の余地があるが、実際には制御入力を大きくしないような解を選択するアルゴリズムと併用することによって満足すべき制御系が得られる。

<文献>

- 1) 北森: 制御対象の部分的知識に基づく制御系の設計法、計測自動制御学会論文集, 15, 549-555 (1979).
- 2) T. Kitamori: A design method for nonlinear control systems based upon partial knowledge about controlled objects. Proc. IFAC 8th World Congr., 1, 455-461 (1981).
- 3) M. Schetzen: Theory of pth-order inverses of nonlinear systems. IEEE Trans. Circ. Syst., 23, 285-291 (1976).